线性规划问题1

翟卫欣 副教授

zhaiweixin@cau.edu.cn

中国农业大学信息与电气工程学院

目录

目录

线性规划的定义

- 线性规划研究的是一类在线性约束条件下求解线性目标函数极值的问题，即确定一组决策变量，是的目标函数取得极小值（或极大值）。

目录

线性规划标准模型

$$\begin{aligned} \textit{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \textit{subject to} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{b} \geqslant \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$m \leqslant n$，$rank\boldsymbol{A} = m$。

线性规划的其他形式可转化为标准模型进行求解。

线性规划标准模型的转化

- 一般假设列向量$\boldsymbol{b} \geqslant \boldsymbol{0}$，如果$\boldsymbol{b}_i \leqslant \boldsymbol{0}$，则可对第$i$个约束方程等号两侧同时乘以$-1$。
- 对于maximize的问题，可将$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$乘以$-1$转化为minimize的问题。

线性规划标准模型的转化

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{subject} \quad \text{to} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

对于以上形式的线性规划问题，可以引入剩余变量$\boldsymbol{y}$，转化为以下形式：

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{subject} \quad \text{to} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}_m \boldsymbol{y} = [\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{I}_m] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{I}_m$是m阶单位矩阵。

线性规划标准模型的转化

剩余变量的引入将不等式约束转化为了等式约束转化过程展开如下：

转化前：

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i, i = 1, 2, \cdots, m$$

转化后：

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - y_i = b_i, i = 1, 2, \cdots, m$$

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0, y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, \cdots, y_m \geqslant 0$$

线性规划标准模型的转化

$$\begin{aligned} minimize \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ subject \quad to \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

对于以上形式的线性规划问题，可以引入松弛变量$\boldsymbol{y}$，转化为以下形式：

$$\begin{aligned} minimize \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ subject \quad to \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{I}_m \boldsymbol{y} = [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}_m] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{I}_m$是m阶单位矩阵。

线性规划标准模型的转化

松弛变量的引入将不等式约束转化为了等式约束转化过程展开如下：

转化前：

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leqslant b_i, i = 1, 2, \cdots, m$$

转化后：

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + y_i = b_i, i = 1, 2, \cdots, m$$

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0, y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, \cdots, y_m \geqslant 0$$

线性规划模型举例

某人食用3类食物F_1，F_2，F_3，单位质量的每类食物中分别包含P_1，P_2，P_3，P_4四类营养成分。每种营养成分的最低摄入量、每类食物所包含热量均在表中展示。目标是在保证营养的前提下使得总热量最小。

	食物F_1	食物F_2	食物F_3	最低摄入量
营养成分P_1	1	1	1	10
营养成分P_2	2	3	3	16
营养成分P_3	1	5	2	12
营养成分P_4	3	2	4	20
热量	15	30	20	

线性规划模型举例

建模思路：

令$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$为三种产品的产量。

约束条件为：

$$\begin{cases}1x_1+1x_2+1x_3\geqslant 10\\2x_1+3x_2+3x_3\geqslant 16\\1x_1+5x_2+2x_3\geqslant 12\\3x_1+2x_2+4x_3\geqslant 20\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1x_1+1x_2+1x_3-1y_1=10\\2x_1+3x_2+3x_3-1y_2=16\\1x_1+5x_2+2x_3-1y_3=12\\3x_1+2x_2+4x_3-1y_4=20\\x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,y_4\geqslant 0\end{cases}$$

优化目标为：

minimize $\quad f(x_1,x_2,x_3)=15x_1+30x_2+20x_3$

线性规划模型举例

问题的矩阵形式：

$$\begin{aligned} \textit{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \textit{subject to} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 15 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \\ 12 \\ 20 \end{bmatrix}$$

线性规划模型举例

标准化：

$$
\begin{aligned}
minimize \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
subject \quad to \quad & [\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ -\boldsymbol{y}\end{bmatrix}=\boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{c}^T=\begin{bmatrix}15\\30\\20\end{bmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&3\\1&5&2\\3&2&4\end{bmatrix},\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}10\\16\\12\\20\end{bmatrix}
$$

目录

基本解与可行解

对于标准化问题：

$$\begin{aligned} minimize \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ subject \quad to \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$，$m \leqslant n$，$rank\boldsymbol{A} = m$，$\boldsymbol{b} \geqslant \boldsymbol{0}$。

- 从$\boldsymbol{A}$中选择m个线性无关的列向量组成方阵$\boldsymbol{B}$，求解方程$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{b}$可得到$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$。令$\boldsymbol{x}$为$n$维列向量，其中对应的$m$个元素组成的向量为$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}$，其他元素为0，则称$\boldsymbol{x}$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$在基$\boldsymbol{B}$下的基本解。
- 通常将$\boldsymbol{A}$的列向量进行重排序，使得方阵$\boldsymbol{B}$是$\boldsymbol{A}$的前m列，即$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N}]$，其中$\boldsymbol{N}$是$m \times (n-m)$维矩阵。$\boldsymbol{x}$为$n$维列向量，其中对应的前$m$个为$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}$，其他元素为0，即$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}^T, \boldsymbol{0}^T]^T$。
- 向量$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}$中的元素成为基变量，$\boldsymbol{B}$中的列向量成为基本列向量。如果$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}$中的某些基变量为0，则称这个基本解为退化基本解。

基本解与可行解

可行解定义

- 满足约束条件即$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{0}$的向量$\boldsymbol{x}$称为可行解。
- 如果某个可行解也是基本解，则称之为基本可行解。
- 如果基本可行解是退化的基本解，则称之为退化的基本可行解。

可行解与基本可行解举例

- 考虑方程$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，其中$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix}$，求其基本可行解。
- 求解得方程的通解为$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 14/5 \\ -11/5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -2/5 \\ 3/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，其中$s, t \in \mathbb{R}$。

可行解与基本可行解举例

基本解的个数最多为$C_n^m = 6$个：

编号	x_1	x_2	x_3	x_4	$\boldsymbol{B}$	基本解	可行解
1	/	/	0	0	$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$	$[14/5, -11/5, 0, 0]^T$	否
2	/	0	/	0	$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3]$	$[4/3, 0, 11/3, 0]^T$	是
3	/	0	0	/	$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4]$	无基本解	/
4	0	/	/	0	$[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]$	$[0, 2, 7, 0]^T$	是
5	0	/	0	/	$[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4]$	$[0, -11/5, 0, -28/5]^T$	否
6	0	0	/	/	$[\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4]$	$[0, 0, 11/3, -8/3]^T$	否

目录

基本解的性质

- 求解线性规划时，仅需考虑**基本可行解**。
- 对于任何满足约束条件$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$的向量$\boldsymbol{x}$，如果它能够使目标函数$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$取得极小值，那么就将其称为**最优可行解**。如果最优可行解是基本解，那么它就是**最优基本可行解**。
- 目标函数的最优值（如果存在）总是可以在某个**基本可行解**上找到。

基本解的性质

- 对于线性规划的标准型，如果存在可行解，那么一定存在基本可行解。
- 证明：

假设$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$是一个可行解，且有$p$个正元素。假设其前$p$个元素是正值，其他元素为0。

即，$x_1, x_2, \cdots, x_p > 0, x_{p+1} = x_{p+2} = \cdots = x_n = 0$。

由于$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p, \cdots, \boldsymbol{a}_n]$，所以，

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_p\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{b}$$

基本解的性质

1）假设$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p$线性无关，又因为$rank A = m$，则$\boldsymbol{A}$中不可能有大于$m$个线性无关的列向量，所以$p \leqslant m$。

1. $p = m$时，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p$是一组$m$维基，定义为基$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}$是非奇异$m$阶方阵。$\boldsymbol{x}$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$在基$\boldsymbol{B}$下的解。$\boldsymbol{x}$的前$m$个元素大于0，其余元素等于0。$\boldsymbol{x}$是基本可行解。
2. $p < m$时，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p$是一组$m$维基的一部分，线性规划标准型要求$rank A = m$，因此可找到额外$m - p$个向量扩展为一组$m$维的基。$\boldsymbol{A}$的前$p$个列向量和额外的$m - p$个列向量构成了基$\boldsymbol{B}$。 $\boldsymbol{x}$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$在基$\boldsymbol{B}$下的解，$\boldsymbol{B}$是非奇异$m$阶方阵。$\boldsymbol{x}$的前$p$个元素大于0，相应的额外的$m - p$个元素等于0，其余元素等于0。$\boldsymbol{x}$是退化的基本可行解。

基本解的性质

2）假设$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p$线性相关，则存在不全为0的数$y_i, i = 1, 2, \cdots, p$使得$y_1\boldsymbol{a}_1 + y_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + y_p\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{0}$。可保证$y_i$中至少存在一个正数。

1 $$\begin{cases} x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_p\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{b} \\ y_1\boldsymbol{a}_1 + y_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + y_p\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

$\Rightarrow (x_1 - \varepsilon y_1)\boldsymbol{a}_1 + (x_2 - \varepsilon y_2)\boldsymbol{a}_2 + \cdots + (x_p - \varepsilon y_p)\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{b}$，其中$\varepsilon \in \mathbb{R}$

2 令$\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_p, 0, \cdots, 0]^T$，则$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{y}] = \boldsymbol{b}$

3 令$\varepsilon = min\{x_i/y_i | i = 1, 2, \cdots, p, y_i > 0\}$，即$\varepsilon$取满足$y_i > 0$的前提下$x_i/y_i$的最小值

那么$\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{y}$相比于$\boldsymbol{x}$，有一个原来为正的元素变成了0，其他各元素的正负号不变。此时$\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{y}$是一个满足:a)所有元素均非负，b)$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{y}] = \boldsymbol{b}$， c)至多有$p - 1$个正数元素 这三个条件的向量。

所以存在一个最多有$p - 1$个元素的可行解。回到所有证明的第一步，$p \Rightarrow p - 1$。重复下去，总可以找到可行解中对应的$\boldsymbol{A}$中元素都线性无关，则转到1)，一定存在基本可行解。

基本解的性质

- 对于线性规划的标准型，如果存在最优可行解，那么一定存在最优基本可行解。
- 证明：
  假设$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$是一个最优可行解，且有$p$个正元素。假设其前$p$个元素是正值，其他元素为0，即$x_1, x_2, \cdots, x_p > 0, x_{p+1} = x_{p+2} = \cdots = x_n = 0$。
  由于$A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p, \cdots, \boldsymbol{a}_n]$，所以，$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_p\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{b}$
  1）假设$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p$线性无关，已证明$\boldsymbol{x}$是基本可行解，又因为$\boldsymbol{x}$是最优可行解，所以$\boldsymbol{x}$是最优基本可行解。

基本解的性质

2）假设$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p$线性相关，则存在不全为0的数$y_i, i = 1, 2, \cdots, p$使得$y_1\boldsymbol{a}_1 + y_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + y_p\boldsymbol{a}_p = \mathbf{0}$，令$\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_p, 0, \cdots, 0]^T$。$\boldsymbol{x}$作为最优可行解应满足$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}'$，其中$\boldsymbol{x}'$是任意可行解。
令ε取任意值满足$|\varepsilon| \leqslant min\{|x_i/y_i||i = 1, 2, \cdots, p, y_i \neq 0\}$，$\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{y}$相比于$\boldsymbol{x}$，最多有一个原来为正的元素变成了0，其他各元素的正负号不变，是可行解，所以$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{y})$，所以$\boldsymbol{c}^T\varepsilon\boldsymbol{y} \leqslant 0$。
由于ε可正可负（即ε与$-\varepsilon$均满足条件），所以$\varepsilon\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} = 0$。所以可知$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{y}$正交。
所以，如果$\boldsymbol{x}$是最优可行解，则$\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{y}$同样是最优可行解。
令$\varepsilon = min\{x_i/y_i|i = 1, 2, \cdots, p, y_i > 0\}$，则可得到一个最多有$p-1$个元素的最优可行解。回到所有证明的第一步，$p \Rightarrow p-1$。重复下去，总可以找到最优可行解中对应的$A$中元素都线性无关，则转到1)，一定存在最优基本可行解。

Thank you for your attention!

翟卫欣 副教授

zhaiweixin@cau.edu.cn

中国农业大学信息与电气工程学院