整数规划

翟卫欣 副教授

zhaiweixin@cau.edu.cn

中国农业大学信息与电气工程学院

目录

目录

整数规划的含义

线性整数规划：除目标函数和约束函数是线性函数外，还要求决策变量取整数值，简称为整数规划。

- 所有变量取整数值：纯整数规划
- 部分变量取整数值：混合整数规划
- 变量只取0或1：$0-1$规划

一般表示为：

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ s.t. \quad & Ax = b, \\ & x \geqslant 0, \quad x_j\text{为整数}, \quad \forall j \in IN. \end{aligned} \tag{P_0}$$

其中 IN 是取整数的变量的下标集，A 为 $m \times n$ 矩阵， c 是 n 维行向量，b 是 m 维列向量.

目录

分支定界法

分支定界法的计算过程涉及松弛、分解和探测三个基本概念。

1.松弛

将整数规划 (P_0) 去掉整数性约束，得到线性规划：

$$\begin{aligned} min \quad & cx \\ s.t. \quad & Ax = b, \\ & x \geqslant 0. \end{aligned} \qquad (\overline{P}_0)$$

称 $(\overline{P}_0)$ 为整数规划 (P_0) 的松弛问题.

整数规划 (P_0) 与它的松弛问题 $(\overline{P}_0)$ 之间有下列关系：

(1) 若 $(\overline{P}_0)$ 没有可行解，则 (P_0) 无可行解；

(2) $(\overline{P}_0)$ 的最小值给出 (P_0) 的最小值的下界 F_l ；

(3) 若 $(\overline{P}_0)$ 的最优解是 (P_0) 的可行解，则也是 (P_0) 的最优解.

分支定界法

2.分解

设整数规划问题 (P_0) 的可行集为 $S(P_0)$，子问题 $(P_1),\cdots,(P_k)$ 的可行集分别为 $S(P_1),\cdots,S(P_k)$,每个子问题与 (P_0) 有相同的目标函数，满足条件 $\bigcup\limits_{i=1}^{k} S(P_i)=S(P_0)$ 及 $S(P_i)\bigcap S(P_j)=\varnothing,\forall i\neq j$，则称 (P_0) 分解成子问题 $(P_1),\cdots,(P_k)$ 之和。

分支定界法

下面给出一种分解方法：

设松弛问题 $(\bar{P}_0)$ 的最优解不满足 (P_0) 中整数性要求. 任选一个不满足整数性要求的变量 x_j，设其取值为 $\bar{b}_j$，用 $[\bar{b}_j]$ 表示小于 $\bar{b}_j$ 的最大整数，将约束 $x_j \leqslant [\bar{b}_j]$ 和 $x_j \geqslant [\bar{b}_j]+1$ 分别置于问题 (P_0) 中，则将 (P_0) 分解成下列两个子问题：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & cx \\
s.t. \quad & Ax = b, \qquad\qquad (P_1) \\
& x_j \leqslant [\bar{b}_j], \\
& x \geqslant 0, \quad x_j\text{为整数}, \forall j \in IN.
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\min \quad & cx \\
s.t. \quad & Ax = b, \qquad\qquad (P_2) \\
& x_j \geqslant [\bar{b}_j] + 1, \\
& x \geqslant 0, \quad x_j\text{为整数}, \forall j \in IN.
\end{aligned}
$$

分支定界法

3.探测

设整数规划 (P_0) 已分解成 $(P_1), \cdots, (P_k)$ 之和，各自的松弛问题分别记作 $(\overline{P}_1), \cdots, (\overline{P}_k)$，又知 (P_0) 的一个可行解 $\bar{x}$，则有下列探测结果 $(i \neq 0)$：

- 若松弛问题 $(\overline{P}_i)$ 没有可行解，则探明相应的子问题 (P_i) 没有可行解，可将 (P_i) 删去.
- 若 $(\overline{P}_i)$ 的最小值不小于 $c\bar{x}$，则探明子问题 (P_i) 没有比 $\bar{x}$ 更好的可行解，因此可以删去.
- 若松弛问题 $(\overline{P}_i)$ 的最优解是 (P_i) 的可行解，则也是 (P_i) 的最优解. 因此，在以后的分解或探测中，子问题 (P_i) 不必再考虑. 若 (P_i) 的最优值 $cx^{(i)} < c\bar{x}$，则令 $c\bar{x} = cx^{(i)}$，即将 (P_i) 的最优值 $cx^{(i)}$ 作为 (P_0) 的最优值的一个新的上界.
- 如果各个松弛问题 $(\overline{P}_i)$ 的最小值均不小于问题 (P_0) 最优值的已知上界，则整数规划 (P_0) 达到最优解.

分支定界法

用分支定界法求解问题 (P_0) 时，首先要给定一个最优值上界 $c\bar{x}$ ，如果还未求出 (P_0) 的一个可行解 $\bar{x}$ ，可令 $c\bar{x} = +\infty$. 然后将 P_0 分解成若干个子问题，并用单纯形法依次求解各个松弛子问题，确定子问题目标函数值的下界，根据计算结果决定现行子问题是否作进一步分解，并逐步更新 (P_0) 的最优值的上界，使之越来越小. 最终所有需要探测的子问题均已探明，并给出了 (P_0) 的最优解，或得出无界的结论.

分支定界法

例：用分支定界法求解整数规划(P)：

$$\begin{aligned} min \quad & 2x_1 - x_2 \\ s.t. \quad & 5x_1 + 4x_2 \leqslant 20, \\ & -3x_1 + x_2 \leqslant 3, \\ & x_1, x_2 \geqslant 0, \quad x_1, x_2 \text{为整数}. \end{aligned}$$

解：由于$(0,0)$为可行解，知目标函数值一个上界 $F_u = 0$，用单纯形方法解松弛问题

$$\begin{aligned} min \quad & 2x_1 - x_2 \\ s.t. \quad & 5x_1 + 4x_2 \leqslant 20, \\ & -3x_1 + x_2 \leqslant 3, \\ & x_1, x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

最优解 $\bar{x}_1 = \frac{8}{17}$，$\bar{x}_2 = \frac{75}{17}$，最小值$f = -\frac{59}{17}$，因此 (P) 的最优值$F^* \in \left[-\frac{59}{17}, 0\right]$

分支界定法

由于松弛问题的解不满足整数型要求，引进条件 $x_1 \leqslant [\bar{x}_1]$ 和 $x_1 \geqslant [\bar{x}_1]+1$ ，即 $x_1 \leqslant 0$ 及 $x_1 \geqslant 1$ ，将 (P) 分解为 (P_1)、(P_2) 2 个子问题：

$$
\begin{aligned}
min \quad & 2x_1 - x_2 \\
s.t. \quad & 5x_1 + 4x_2 \leqslant 20, \\
& -3x_1 + x_2 \leqslant 3, \qquad (P_1) \\
& x_1 \leqslant 0, \\
& x_1, x_2 \geqslant 0, x_1, x_2 \text{为整数}.
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
min \quad & 2x_1 - x_2 \\
s.t. \quad & 5x_1 + 4x_2 \leqslant 20, \\
& -3x_1 + x_2 \leqslant 3, \qquad (P_2) \\
& x_1 \geqslant 1, \\
& x_1, x_2 \geqslant 0, x_1, x_2 \text{为整数}.
\end{aligned}
$$

对于 $(\overline{P}_1)$ ，最优解为 $\bar{x}_1 = 0$ ，$\bar{x}_2 = 3$，最优值 $f_1 = -3$ ，是整数规划 (P) 的可行解，因此令 (P) 的最优值的一个新上界 $F_u = -3$. (P_1) 不需要再分解， (P) 的最优值 $F^* \in [-\dfrac{59}{17}, -3]$.

对于 $(\overline{P}_2)$ ，最优解为 $\bar{x}_1 = 1$ ， $\bar{x}_2 = \dfrac{15}{4}$ ，最优值 $f_2 = -\dfrac{7}{4}$ ，由于 x_2 取值非整数，所以这个解不是子问题 (P_2) 的可行解. 但是，它给出 (P_2) 最优值的下界 $-\dfrac{7}{4}$ ，这个值大于 (P) 的最优值的上界 $F_u = -3$ ，因此不必再分解，已得到整数规划的最优解 $x_1^* = 0, x_2^* = 3$ ，最优值 $F^* = -3$.

目录

割平面法

割平面法首先求解整数规划的线性松弛问题. 如果得到的最优解满足整数要求，则为整数规划的最优解；否则，选择一个不满足整数要求的基变量，定义一个新约束，增加到原来的约束集中. 这个约束的作用是，切掉一部分不满足整数要求的可行解，缩小可行域，而保留全部整数可行解. 然后，解新的松弛线性规划. 重复以上过程，直至求出整数最优解. 在这种方法中，关键是如何定义切割约束，下面进行介绍.

割平面法

考虑整数规划

$$
\begin{aligned}
\min \quad & cx \\
s.t. \quad & Ax = b, \\
& x \geqslant 0, \quad x \text{ 的分量为整数}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

松弛问题为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & cx \\
s.t. \quad & Ax = b, \\
& x \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

其中 $A = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 为 $m \times n$ 矩阵， p_j 是 A 的第 j 列，假设 (2) 式的最优基为 $\boldsymbol{B}$ ，最优解

$$
x^* = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{bmatrix} \geqslant 0.
$$

若 x^* 的分量均为整数，则 x^* 是整数规划 (1) 的最优解；否则选择一个不满足整数要求的基变量，比如 x_{B_i} ，用包含这个基变量的约束方程（称为源约束）定义切割约束。

割平面法

方法如下：假设含有 x_{B_i} 的约束方程为

$$x_{B_i} + \sum_{j\in R} y_{ij}x_j = \bar{b}_i \tag{3}$$

其中 R 为非基变量下标集， y_{ij} 是 $B^{-1}p_j$ 的第 i 个分量， $\bar{b}_i$ 是 $\bar{b}$ 的第 i 个分量，记作

$$y_{ij} = [y_{ij}] + f_{ij}, j \in R,$$

$$\bar{b}_i = [\bar{b}_i] + f_i,$$

式中 $[y_{ij}]$ 、 $[\bar{b}_i]$ 分别表示不大于 y_{ij}、$\bar{b}_i$ 的最大整数， f_{ij} 和 f_i 是相应的小数部分， (3) 式写作

$$x_{B_i} + \sum_{j\in R}[y_{ij}]x_j - [\bar{b}_i] = f_i - \sum_{j\in R} f_{ij}x_j, \tag{4}$$

由于 $0 < f_i < 1, 0 \leqslant f_{ij} < 1, x_j \geqslant 0$ ，由 (4) 式得到

$$f_i - \sum_{j\in R} f_{ij}x_j < 1$$

对于任意的整数可行解，由于 (4) 式左端为整数，则右端为小于 1 的整数，得到整数解的必要条件为

$$f_i - \sum_{j\in R} f_{ij}x_j \leqslant 0 \tag{5}$$

割平面法

将上式作为切割条件，增加到(2)式的约束中，得到线性规划

$$\begin{aligned} min \quad & cx \\ s.t. \quad & Ax = b, \\ & f_i - \sum_{j \in R} f_{ij} x_j \leqslant 0, \\ & x \geqslant 0. \end{aligned} \tag{6}$$

再用对偶单纯形法求解.

易知原来的非整数最优解 $x^* = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ 必不是 (6) 式的可行解；否则，由于 $x_j = 0, \forall j \in R$ 以及 $f_i > 0$ ，必然得到 (5) 式左端大于 0 ，矛盾. 因此，条件 (5) 切掉非整数最优解. 另一方面， (5) 式并不切掉整数可行解. 对于任何整数可行解，带入 (4) 式，左端为整数，因此右端也为整数，必满足 (5) 式.

割平面法

例：用割平面法求解整数规划：

$$\begin{aligned} min \quad & x_1 - 2x_2 \\ s.t. \quad & -x_1 + 3x_2 \leqslant 2, \\ & x_1 + x_2 \leqslant 4, \\ & x_1, x_2 \geqslant 0, \quad x_1, x_2 \text{为整数}. \end{aligned}$$

解：先用单纯形法解松弛问题

$$\begin{aligned} min \quad & x_1 - 2x_2 \\ s.t. \quad & -x_1 + 3x_2 \leqslant 2, \\ & x_1 + x_2 \leqslant 4, \\ & x_1, x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

最优单纯形表为：

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	$-1/3$	1	$1/3$	0	$2/3$
x_4	$4/3$	0	$-1/3$	1	$10/3$
	$-1/3$	0	$-2/3$	0	$-4/3$

割平面法

最优解为 $x_1 = 0, x_2 = 2/3$ ，不满足整数要求，任选一个取值非整数的基变量，比如 x_2，由上表知，源约束为

$$-\frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{2}{3}$$

将非基变量 x_1 和 x_3 的系数以及常数项分别分解为 $-1/3 = -1 + 2/3, 1/3 = 0 + 1/3, 2/3 = 0 + 2/3$ ，得到切割条件为

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 \leqslant 0,$$

即

$$-2x_1 - x_3 \leqslant -2.$$

引进松弛变量 x_5 ，将此条件置入上面的最优表，得到

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	$-1/3$	1	$1/3$	0	0	$2/3$
x_4	$4/3$	0	$-1/3$	1	0	$10/3$
x_5	-2	0	-1	0	1	-2
	$-1/3$	0	$-2/3$	0	0	$-4/3$

用对偶单纯形方法求解，最优解 $x_1 = 1, x_2 = 1$ ，最优值 $f_{min} = -1$ ，这个解也是整数规划的最优解.

目录

0-1规划的隐数法

考虑 $0-1$ 规划 (P)：

$$
\begin{aligned}
min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i, \quad i = 1, \cdots, m, \\
& x_j \text{ 取 } 0 \text{ 或 } 1, \quad j = 1, \cdots, n.
\end{aligned}
$$

其中 c_j，a_{ij}，b_i 均为整数.

0-1规划的隐数法

记

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,\quad c=(c_1,c_2,\cdots,c_n),$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

(P) 可写成下列形式：

$$\begin{aligned} min \quad & cx \\ s.t. \quad & A_i x \geqslant b_i, \quad i=1,2,\cdots,m, \\ & x_j \text{ 取 } 0 \text{ 或 } 1, \quad j=1,\cdots,n. \end{aligned}$$

为了不失一般性，做两点假设：

(1) $c_j \geqslant 0\ (j=1,2,\cdots,n)$. 如果某个 $c_j<0$，则作变量替换，令 $x_j^{'}=1-x_j$，对变换后的 $x_j^{'}$，必有系数 $-c_j>0$.

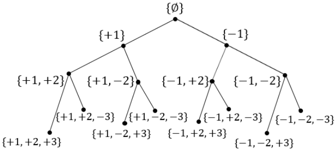
(2) $c_1 \leqslant c_2 \leqslant \cdots \leqslant c_n$，如果此项规定不满足，则更改变量下标，使假设成立。

0-1规划的隐数法

隐数法的基本思路是，把问题 (P) 分解成若干个子问题，按一定规则检查各子问题，直至找到最优解.

具体地，先按 x_1 取 1 或 0 把 (P) 分解成两个子问题 (P_1) 和 (P_2) . (P_1) 记作 $\{+1\}$，(P_2) 记作 $\{-1\}$，x_1 称为固定变量，$x_2, x_3, \cdots, x_n$ 称为自由变量. 再按 x_2 取 1 或 0 分解每个子问题，分别记为 $\{+2\}$、$\{-2\}$. 若取 x_1、x_2 作为固定变量，$x_3, x_4, \cdots, x_n$作为自由变量，则得到 4 个子问题，分别记作 $\{+1, +2\}$, $\{+1, -2\}$，$\{-1, +2\}$，$\{-1, -2\}$. 一般地，若 $x_i, x_j, \cdots, x_k$ 为固定变量，分别取值 $1, 0, \cdots, 1$，用 $\{\sigma\}$ 表示相应的子问题，则记作$\{\sigma\} = \{+i, -j, \cdots, +k\}$，其他变量为自由变量，在 $\{\sigma\}$ 中不作记录.

按上述方法，有 3 个变量的 $0-1$ 规划完全分解成子问题后，可得到下列树枝形式：



0-1规划的隐数法

隐数法是从问题 (P) (也记作$\{\phi\}$)出发，沿各树枝，从左到右依次探测各子问题，直至给出最优解，或得出原问题无可行解的结论。

在探测过程中，对于每个子问题 $\{\sigma\}$, 取自由变量等于 0 的点作为探测点，记作 σ_0. 显然，由于 $0 \leqslant c_1 \leqslant c_2 \leqslant \cdots \leqslant c_n$，若 σ_0 是可行点，则必是子问题$\{\sigma\}$的最小点. 下面介绍几条探测规则.

设已知整数规划 (P) 的一个可行点 $\bar{x}$，它的目标函数值 $\bar{f} = c\bar{x}$. 现在考虑 (P) 的任一个子问题 $\{\sigma\}$，相应的探测点记作 σ_0. 设 x_j 是 $\{\sigma\}$ 中具有最小下标的自由变量，则依次有下列探测结果:

(1) 若 $c\sigma_0 \geqslant \bar{f}$，则子问题 $\{\sigma\}$ 中没有比 $\bar{x}$ 更好的可行解.

(2) 若 $c\sigma_0 < \bar{f}$，且 σ_0 是 (P) 的可行解，则 σ_0 是比原来的 $\bar{x}$ 更好的可行解，因此置 $\bar{x} = \sigma_0, \bar{f} = c\sigma_0$.

(3) 若$c\sigma_0 < \bar{f}$， σ_0 不是 $\{\sigma\}$ 的可行解，且 $c\sigma_0 + c_j \geqslant \bar{f}$，则 $\{\sigma\}$ 中没有比 $\bar{x}$ 更好的可行解.

0-1规划的隐数法

(4) 设自由变量有 $x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_k}$，满足不等式 $c\sigma_0+c_{j_1}\leqslant\cdots\leqslant c\sigma_0+c_{j_r}<\bar{f}\leqslant c\sigma_0+c_{j_{r+1}}\leqslant\cdots\leqslant c\sigma_0+c_{j_k}$，记作 $J=\{j_1,j_2,\cdots,j_r\}$，称 J 为可选集.

令 $s_i=A_i\sigma_0-b_i(i=1,\cdots,m)$，$s_i$ 为第 i 个约束的松弛变量. 若所有的 $s_i\geqslant 0$，则 σ_0 是比现行的 $\bar{x}$ 更好的可行解，置 $\bar{x}=\sigma_0,\bar{f}=c\sigma_0$.

(5) 若 σ_0 不是可行解，置 $I=\{i\,|\,s_i<0\}$，称 I 为违背约束集. 置

$$J_i=\{j\,|\,j\in J,a_{ij}>0\},\quad i\in I,$$
$$q_i=\sum_{j\in J_i}a_{ij},\quad i\in I$$

式中 a_{ij} 是系数矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素.

计算 $s_i+q_i,\forall i\in I$. 若对某个 $i\in I$，有 $s_i+q_i<0$，则本子问题没有更好的可行解.

0-1规划的隐数法

计算步骤：

(1) 给定一个可行解 $\bar{x}$，置 $\bar{f} = c\bar{x}$（或令 $\bar{x} = \phi, \bar{f} = +\infty$），置子问题 $\{\sigma\} = \{\phi\}$，探测点 $\sigma_0 = (0, 0, \cdots, 0)^T$，执行步骤 (2).

(2) 若 $c\sigma_0 \geqslant \bar{f}$，本子问题没有比 $\bar{x}$ 更好的可行解，则转步骤 (7)；否则执行步骤 (3).

(3) 计算 $s_i = A_i\sigma_0 - b_i$，(A_i 是 A 的第 i 行) ($i = 1, \cdots, m$). 若 $s_i \geqslant 0\,(i = 1, \cdots, m)$，$\sigma_0$ 是可行解，置 $\bar{x} = \sigma_0, \bar{f} = c\sigma_0$，则转步骤 (7)；否则，置违背约束集 $I = \{i\,|s_i < 0\}$，执行步骤 (4).

(4) 若无自由变量则转步骤 (7). 当存在自由变量时，设自由变量为 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_k}$ $(j_1 < j_2 < \cdots < j_k)$. 若 $c\sigma_0 + c_{j_1} \geqslant \bar{f}$，本子问题没有比 $\bar{x}$ 好的可行解，则转步骤 (7)；否则执行步骤 (5).

(5) 置可选集

$$J = \left\{j_t\,|\,c\sigma_0 + c_{j_t} < \bar{f}, t \in \{1, 2, \cdots, k\}\right\}$$

对每个违背约束集 $i \in I$，置带有正系数的部分自由变量下标集

$$J_i = \left\{j\,|\,j \in J, a_{ij} > 0\right\}, \quad i \in I$$

0-1规划的隐数法

对每个违背约束集 $i \in I$，令

$$q_i = \sum_{j \in J_i} a_{ij}, \quad i \in I \quad (\text{若} J_i = \phi, \text{则置} q_i = 0)$$

计算 $s_i + q_i, \forall i \in I$. 若对某个 $i \in I$,有 $s_i + q_i < 0$, 本子问题没有更好的可行解，则转步骤 (7)；否则执行步骤 (6).

(6) 检验每个指标 $j \in J$，若存在约束指标 $i \in I$，使得 $j \notin J_i$，且 $s_i + q_i + a_{ij} < 0$，则置 $J := J \backslash \{j\}$. 检查完毕时，若 $J = \phi$，则转步骤 (7)；若 $J \neq \phi$，则令 $l = \min\{j \,|\, j \in J\}$. 置子问题 $\{\sigma, +l\} \to \{\sigma\}$，置探测点 $\sigma_0 := \sigma_0 + e_l$，其中 e_l 是第 l 个分量为 1 的单位向量. 转步骤 (2).

(7) 当 $\{\sigma\}$ 中固定变量均取 0 时，探测完毕. 此时，若 $\bar{x} \neq \phi$，$\bar{x}$ 就是最优解；否则无可行解.

当 $\{\sigma\}$ 中固定变量不全为 0 时，不妨假设 $\{\sigma\} = \{\cdots, +u, -v, \cdots\}$，即 x_u 是最后一个固定为 1 的变量，置子问题 $\{\cdots, -u\} \to \{\sigma\}$，并置探测点 $\sigma_0 := \sigma_0 - e_u$($e_u$是第 u 个分量为 1 的单位向量)，然后转步骤 (2).

0-1规划的隐数法

例：用隐数法求解下列 $0-1$ 规划：

$$
\begin{aligned}
min \quad & x_1+3x_2+4x_3+6x_4+7x_5 \\
s.t. \quad & x_1-5x_2+3x_3-4x_4+6x_5 \geqslant 2, \\
& 4x_1+x_2-2x_3+3x_4+x_5 \geqslant 1, \\
& -2x_1+2x_2+4x_3-x_4+4x_5 \geqslant 1, \\
& x_j \text{ 取 } 0 \text{ 或 } 1, \quad j=1,\cdots,5.
\end{aligned}
$$

解：记 $x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T, c=(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)=(1\ 3\ 4\ 6\ 7)$,

$$
A=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 & -4 & 6 \\ 4 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

0-1规划的隐数法

(1) 置初始可行解 $\bar{x} = (0\ 0\ 0\ 0\ 1)^T$ ，在 $\bar{x}$ 处的函数值 $\bar{f} = c\bar{x} = 7$ ，置子问题 $\{\sigma\} = \{\phi\}$ ，取探测点 $\sigma_0 = (0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$

(2) $c\sigma_0 = 0 < \bar{f} = 7$

(3) $s_1 = A_1\sigma_0 - b_1 = -2, s_2 = A_2\sigma_0 - b_2 = -1, s_3 = A_3\sigma_0 - b_3 = -1$，置违背约束集 $I = \{1, 2, 3\}$.

(4) 自由变量有 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

$c\sigma_0 + c_1 = 1 < \bar{f} = 7.$

(5) 根据条件 $c\sigma_0 + c_j < \bar{f}$，求得可选集 $J = \{1, 2, 3, 4\}$.

$J_1 = \{1, 3\}, J_2 = \{1, 2, 4\}, J_3 = \{2, 3\}$.

$q_1 = 4, \quad q_2 = 8, \quad q_3 = 6; \quad s_1 + q_1 = 2, \quad s_2 + q_2 = 7, \quad s_3 + q_3 = 5.$

(6) 检查 J 中每个指标，修改 J ,置可选集 $J = \{1, 3\}$.

取 $l = min\{j \,|\, j \in J\} = 1$.

置$\{\sigma\} = \{+1\}$，置探测点$\sigma_0 = (1\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$.

0-1规划的隐数法

(2) $c\sigma_0 = 1 < \bar{f} = 7$.

(3) $s_1 = A_1\sigma_0 - b_1 = -1, s_2 = A_2\sigma_0 - b_2 = 3, s_3 = A_3\sigma_0 - b_3 = -3$，置 $I = \{1, 3\}$.

(4) 自由变量有 x_2, x_3, x_4, x_5.

$c\sigma_0 + c_2 = 4 < \bar{f} = 7$.

(5) 置可选集 $J = \{2, 3\}$.

$J_1 = \{3\}, \quad J_2 = \{2, 3\}; \quad q_1 = 3, \quad q_3 = 6; \quad s_1 + q_1 = 2, \quad s_3 + q_3 = 3$.

(6) 检查 J 中每个指标，置 $J = \{3\}$.

取 $l = 3$；置$\{\sigma\} = \{+1, +3\}$；取$\sigma_0 = (1\ 0\ 1\ 0\ 0)^T$.

(2) $c\sigma_0 = 5 < \bar{f} = 7$.

(3) $s_1 = A_1\sigma_0 - b_1 = 2, s_2 = A_2\sigma_0 - b_2 = 1, s_3 = A_3\sigma_0 - b_3 = 1$.

σ_0 是可行解，置 $\bar{x} = \sigma_0 = (1\ 0\ 1\ 0\ 0)^T$.

置 $\bar{f} = 5$.

(7) 置子问题$\{\sigma\} = \{+1, +3\}$. 置探测点 $\sigma_0 = (1\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$.

0-1规划的隐数法

(2) $c\sigma_0 = 1 < \bar{f} = 5$.

(3) $s_1 = A_1\sigma_0 - b_1 = -1, s_2 = A_2\sigma_0 - b_2 = 3, s_3 = A_3\sigma_0 - b_3 = -3$.

$I = \{1, 3\}$.

(4) 自由变量有 x_2, x_4, x_5.

$c\sigma_0 + c_2 = 4 < \bar{f} = 5$.

(5) 置可选集 $J = \{2\}$.

$J_1 = \{\phi\}$,置 $q_1 = 0$.

$J_3 = \{2\}, \quad q_3 = 2; \quad s_1 + q_1 = -1, \quad s_3 + q_3 = -1$.

(7) 置子问题$\{\sigma\} = \{-1\}$.

置探测点$\sigma_0 = (0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$.

0-1规划的隐数法

(2) $c\sigma_0 = 0 < \bar{f} = 5$.

(3) $s_1 = A_1\sigma_0 - b_1 = -2, s_2 = A_2\sigma_0 - b_2 = -1, s_3 = A_3\sigma_0 - b_3 = -1$.

$I = \{1, 2, 3\}$.

(4) 自由变量有 x_2, x_3, x_4, x_5.

$c\sigma_0 + c_2 = 3 < \bar{f} = 5$.

(5) 置可选集 $J = \{2, 3\}$,

$J_1 = \{3\}, J_2 = \{2\}, J_3 = \{2, 3\}$.

$q_1 = 3, \quad q_2 = 1, \quad q_3 = 6; \quad s_1 + q_1 = 1, \quad s_2 + q_2 = 0, \quad s_3 + q_3 = 5$.

(6) 检查 J 中指标，修改 J，置 $J = \{\phi\}$.

(7) $\{\sigma\}$ 中固定变量均取 0，因此探测完毕. 最优解 $\bar{x} = (1\ 0\ 1\ 0\ 0)^T$，最优值 $\bar{f} = 5$.

目录

指派问题

运输问题中，若令 $m = n, a_i = b_j = 1$，限定变量只取 0 或 1，则得到一种重要的特殊情形，称为指派问题. 其含义可作如下解释：设有 n 项任务，指派 n 个人去完成，每人均承担一项任务，每项任务各由一个人来完成. 由于劳动者的素质、效率及劳动质量等各不相同，劳务费用自然有别，设第 i 个人完成第 j 项任务的劳务费用为 c_{ij} ,试确定总劳务费最小的分派方案. 这类问题就是指派问题.

指派问题

指派问题中，决策变量为第 i 个人完成第 j 项任务的劳动量，记作 $x_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 若第 i 个人分配到第 j 项任务，则 $x_{ij}=1$，否则 $x_{ij}=0$. 因此决策变量是 $0-1$ 变量. 数学模型如下：

$$
\begin{aligned}
min \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i=1,2,\cdots,n, \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j=1,2,\cdots,n, \\
& x_{ij}\ \text{取 } 0 \text{ 或 } 1, \quad i,j=1,2,\cdots,n.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

指派问题

用矩阵形式，可表达为

$$\begin{aligned} min \quad & cx \\ s.t. \quad & Ax = e, \\ & x_{ij} \text{ 取 } 0 \text{ 或 } 1, \quad i,j = 1,2,\cdots,n. \end{aligned} \tag{2}$$

其中

$$x = (x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n}, \cdots x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{nn})^T$$
$$c = (c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1n}, c_{21}, c_{22}, \cdots, c_{2n}, \cdots c_{n1}, c_{n2}, \cdots, c_{nn})$$

A 是 $(2n) \times n^2$ 矩阵，A 中对应 x_{ij} 的列 $p_{ij} = e_i + e_{n+j}, e_i, e_{n+j} \in \mathbb{R}^{2n}$，是单位向量，$e_i$ 的第 i 个分量是 1，e_{n+j} 的第 $n+j$ 个分量是 1，其他分量均为 0. $e = (1\ 1\ \cdots\ 1)^T \in \mathbb{R}^{2n}$.

指派问题

由于矩阵 A 具有特殊性质及 e 的分量全是 1，则有 $Ax=e, x\geqslant 0$ 的基本可行解中每个 x_{ij} 均为非负整数，且只能等于 0 或 1，从而可以用下列线性规划取代：

$$\begin{aligned} min \quad & cx \\ s.t. \quad & Ax = e, \\ & x \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3}$$

其对偶问题为：

$$\begin{aligned} max \quad & \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j \\ s.t. \quad & u_i + v_j \leqslant c_{ij}, \quad i,j = 1, \cdots n. \end{aligned} \tag{4}$$

对于指派问题，线性规划的各种求解方法均试用。由于指派问题的高度退化性，基本可行解中仅有 n 个基变量取值为 1 ，其他 $n-1$ 个基变量取值均为 0 ，因此存在更加简便有效的特殊解法，下面介绍原始-对偶算法。

指派问题

算法要点是，先给定对偶问题一个可行解，由此出发，设法求出原问题一个满足互补松弛条件的可行解，即满足下列条件的可行解：

$$(c_{ij} - u_i - v_j)x_{ij} = 0, \quad i,j = 1,2,\cdots,n \tag{5}$$

这样的可行解当然就是最优解。

下面分析怎样求满足上述条件的可行解. 首先，将费用系数向量 c 排成矩阵形式，令

$$(c_{ij})_{n\times n} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \tag{6}$$

利用这个矩阵求对偶问题 (4) 的一个可行解，比如，令

$$\begin{cases} u_i = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \{c_{ij}\} \quad i = 1,2,\cdots,n \\ v_j = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \{c_{ij} - u_i\} \quad j = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{7}$$

指派问题

则必有

$$u_i + v_j \leqslant c_{ij}, \quad \forall i, j.$$

因此，$(u_1, u_2, \cdots, u_n, v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 是 (4) 的可行解. 然后，计算对偶松弛变量的取值 $\hat{c}_{ij}$，令

$$\hat{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n. \tag{8}$$

实际上，这个计算可利用矩阵来完成. 先从每一行减去本行的最小数(第 i 行最小数记作 u_i)，在得到的矩阵中，再从每一列减去本列的最小数(第 j 列最小数记作 v_j)，这样便得到由对偶松弛变量取值 $\hat{c}_{ij}$ 构成的 n 阶矩阵

$$(\hat{c}_{ij})_{n\times n} = \begin{bmatrix} \hat{c}_{11} & \hat{c}_{12} & \cdots & \hat{c}_{1n} \\ \hat{c}_{21} & \hat{c}_{22} & \cdots & \hat{c}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{c}_{n1} & \hat{c}_{n2} & \cdots & \hat{c}_{nn} \end{bmatrix} \tag{9}$$

通常称为约化费用系数矩阵，简称为约化矩阵，它的元素 $\hat{c}_{ij}$ 均为非负数.

指派问题

算法计算步骤概括如下：

(1) 变换费用系数矩阵，按照 (7) – (9) 式建立约化矩阵 $(\hat{c}_{ij})_{n\times n}$.

(2) 运用最少直线覆盖约化矩阵所有 0 元素. 若最小直线数等于 n, 则从 0 元素中选择 n 个独立 0 元素(任何两个均不同行又不同列的 n 个 0 元素)，令相应的 $x_{ij}=1$，其他 $x_{ij}=0$，从而得到一个最优解；否则进行步骤 (3).

(3) 变换约化矩阵，选择未被覆盖的最小数，每个未被覆盖的元素减去这个最小数，被二次覆盖的元素加上这个最小数. 返回步骤 (2).

指派问题

例：给定指派问题：

$$\begin{aligned} min \quad & cx \\ s.t. \quad & Ax = e, \\ & x_{ij} \text{ 取 } 0 \text{ 或 } 1, \quad i,j = 1,2,\cdots,5. \end{aligned}$$

其中 $A = (p_{11},\cdots,p_{15},p_{21},\cdots,p_{25},\cdots,p_{51},\cdots,p_{55})$, $p_{ij} = e_i + e_{5+j}$, $e = (1,1,\cdots,1)^T \in \mathbb{R}^{10}$，将费用系数向量 c 排成矩阵形式，有

$$(c_{ij})_{5\times5} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \tag{10}$$

试确定最优指派方案，使总费用最小.

指派问题

解：先求一个约化矩阵，令 $u = (\ -2\ 1\ 1\ 1\ \ -1)$，其中每个分量 u_i 是 $(c_{ij})_{5\times 5}$ 的第 i 行中最小元素，从 $(c_{ij})_{5\times 5}$ 的每一行减去相应的 u_i，得到

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

再令 $v = (\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0)$，从每列减去相应的 v_j，得到约化矩阵

$$(\hat{c}_{ij})_{5\times 5} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

用最少直线，即第 3 行，第 2 列和第 5 列的 3 条直线覆盖全部 0 元素.未被覆盖的元素中最小数是 1.

指派问题

未被覆盖的元素减少 1，两次覆盖的元素增加 1，修改得到新的约化矩阵

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

再用最少直线，即通过第 1 行、第 3 行、第 2 列、第 5 列的 4 条直线覆盖全部 0 元素.未被覆盖的元素中最小数是 1，得到新的约化矩阵：

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

对于此矩阵，最少用 5 条直线覆盖全部 0 元素，因此达到最优解. 从中选取任何两个均不同行又不同列的 5 个 0 元素，令其对应的变量取值为 1，其他变量取值为 0. 如令 $x_{13} = x_{25} = x_{34} = x_{41} = x_{52} = 1$，其他 $x_{ij} = 0$，这就是最优解. 最优值

$$f = 0 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 1 + (-1) \times 1 = 5$$

Thank you for your attention!

翟卫欣 副教授

zhaiweixin@cau.edu.cn

中国农业大学信息与电气工程学院